ŞIRURI RECURENTE

ȚILICĂ,Daniela Prof.Colegiul Tehnic "Gheorghe Asachi", Bucureşti

Nici o cercetare umană nu se poate numi ştiinţă dacă nu trece prin demonstraţia matematică (Leonardo Da Vinci)

Studiul şirurilor de numere reale definite prin relaţii de recurenţă poate constitui un exerciţiu captivant pentru cei ce doresc să dobândească o imagine de ansamblu a matematicii ca parte a unui sistem aflat în permanentă evoluţie şi interacţiune cu lumea înconjurătoare. Lucrarea prezintă câteva rezultate teoretice privind şirurile recurente: justificarea existenţei şirurilor definite prin definite prin relaţii de recurenţă liniare omogene, algoritmul pentru determinarea termenului general al şirului definit printr-o astfel de relaţie, proprietăţi interesante ce derivă din relaţiile de recurenţă. De asemenea, sunt prezentate câteva exemple de şiruri celebre, definite prin relaţii de recurenţă de ordin doi şi aspecte practice ale integrării acestora în viaţa reală.

1. ARGUMENT

Bazele teoriei şirurilor recurente au fost puse în secolul al XVIII de către matematicienii Abraham De Moivre şi Daniel Bernoulli, de şi primul şir numeric în care relaţia între termenii succesivi poate fi exprimată printr-o relaţie matematică a apărut în 1202 în cartea *Liber abaci* (*Cartea abacului*) a lui Leonardo Fibonacci; şirul 1, 1, 2, 3, 5, 8, ..., în care fiecare termen este egal cu suma celor doi termeni precedenţi a fost numit ş*irul lui Fibonacci* abia în secolul XIX de către matematicianul francez Edouard Lucas. Leonard Euler a dedicat un capitol (13) şirurilor recurente în cartea sa *Introduction to the Analysis of Infinitesimales* (1748).

Pe lângă faptul că şirurile definite prin recurenţă reprezintă o parte specială a analizei matematice, acestea au aplicaţii practice neaşteptate. Oamenii încearcă permanent să înţeleagă natura şi legile acesteia, să simtă ritmurile cosmice, să înţeleagă de fapt mai profund viaţa, pentru a ajunge la o armonie cu mediul înconjurător. Şi cum *natura este o carte scrisă în limbaj matematic* (Leoanrdo Da Vinci), matematicienii tuturor timpurilor au încercat, şi de cele mai multe ori au reuşit, să modeleze fenomenele naturale, să găsească noi aplicaţii şi interpretări noţiunilor teoretice astfel descoperite.

Şirurile recurente apar în numeroase probleme de ştiinţă, pornind de la fizica clasică, chimie, matematică, până la cele mai moderne domenii ale cunoaşterii: sinergetica, teoria fractalilor, teoria haosului, în calculatoarele neuronale şi automatele celulare; sunt utilizate în generatorii pseudoaleatori de numere, precum şi în diverse procedee şi metode de optimizare.

Şirul lui Fibonacci, amintit anterior, se regăseşte în analiza algoritmului lui Euclid de determinare a celui mai mare divizor comun a două numere întregi, în rezolvarea problemei lui Hilbert, în teorema lui Zeckendorf.

Pe de altă parte, numerele lui Fibonacci se regăsesc în jurul nostru de la aranjamentele frunzelor în botanică până la structura galaxiilor, de la cochiliile spiralate ale moluştelor şi înmulţirea iepurilor până la structuri arhitectutale monumentale. Este motivul pentru care numerele lui Fibonacci au fost considerate a fi *modul de măsurare al Dinivităţii* sau *sistemul de numărare al naturii*.

Progresiile, şiruri în care fiecare termen, începând cu al doilea se obţine din cel precedent prin adunarea (progresii aritmetice), respectiv înmulţirea cu un număr real nenul (geometrice) sunt des întâlnite în diferite domenii: benzile Liesegang în geologie, aranjarea dipolilor la antenele de televiziune, în muzică, peisagistică, sculptură, fotografie, origami şi chiar în economie.

În anul 1798, economistul englez Thomas Malthus a făcut o "profeţie" îngrijorătoare. El a lansat ipoteza că populaţia globului creşte în progresie geometrică, în timp ce resursele alimentare cresc în progresie aritmetică. În ritmul acesta el a prevăzut că într-o zi oamenii nu vor mai avea practic ce să mănânce. Însă, datorită epidemiilor, războaielor şi catastrofelor naturale, precum şi datorită progresului economic, profeţia lui Malthus nu s-a adeverit ... încă.

2. RELAȚII DE RECURENȚĂ DE ORDIN k

După cum se ştie, şirurile pot fi definite sintetic, analitic sau recurent. O relație de recurență este o formulă ce exprimă orice termen al şirului, de la un rang încolo, în funcție de unul sau mai mulți termeni precedenți.

În general, determinarea termenului general al şirului este dificilă, de cele mai multe ori imposibilă. De aceea, exercițiile cu şiruri recurente cer studiul convergenței, eventual calcularea limitei. În cazul particular al recurențelor liniare cu coeficienți constanți exprimate prin egalități se pot enunța algoritmi pentru determinarea termenului general al şirului.

Fie $k \in \mathbf{N}^*$ şi fie şirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ definit printr-o relație de recurență liniară omogenă de ordin k, în care diferența maximă a rangurilor termenilor ce intervin este k:

$$x_{n+k} = a_1 x_{n+k-1} + a_2 x_{n+k-2} + ... + a_k x_n, \forall n \in \mathbf{N},\ x_0, x_1, ..., x_{k-1} \in \mathbf{R}, \text{ date.} \quad (1)$$

Existența unui şir ce verifică o astfel de relație de recurență este justificată prin următoarele rezultate teoretice. Se asociază relației ecuația caracteristică:

$$t^k - a_1 t^{k-1} - ... - a_k = 0. \quad (2)$$

Lema 1: Dacă $t \in \mathbf{R}$ este soluție a ecuației caracteristice (2), atunci şirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $x_n = t^n$ verifică relația de recurență (1).

Lema 2: Dacă şirurile $(x_n^{(1)})_{n\in\mathbf{N}}$, $(x_n^{(2)})_{n\in\mathbf{N}}$, ..., $(x_n^{(k)})_{n\in\mathbf{N}}$ îndeplinesc condiția de recurență şi sunt liniar independente, atunci orice soluție $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ se exprimă ca o combinație liniară a şirurilor $(x_n^{(1)})_{n\in\mathbf{N}}$, $(x_n^{(2)})_{n\in\mathbf{N}}$, ..., $(x_n^{(k)})_{n\in\mathbf{N}}$, adică există $p_1, p_2, ..., p_k \in \mathbf{R}$ astfel încât

$$x_n = p_1 u_n^{(1)} + p_2 u_n^{(2)} + ... + p_k u_n^{(k)}, \forall n \in \mathbf{N}. \quad (3)$$

Lema 3: Există k şiruri liniar independente ce verifică relația de recurență.

- Dacă ecuația caracteristică are soluții reale distincte $t_1, t_2, ..., t_k$, şirurile sunt:

$$u_n^{(1)} = t_1^n, u_n^{(2)} = t_2^n, ..., u_n^{(k)} = t_k^n. \quad (4)$$

- Dacă ecuația caracteristică are soluții reale multiple: t_1 cu ordinul de multiplicitate l_1, t_2 cu ordinul de multiplicitate l_2, ..., t_m cu ordinul de multiplicitate l_m, unde $l_1 + l_2 + ... + l_m = k$, şirurile sunt:

$$\begin{aligned} &u_n^{(1,1)} = t_1^n, u_n^{(1,2)} = n t_1^n, ..., u_n^{(1,l_1)} = n^{l_1-1} t_1^n, \\ &u_n^{(2,1)} = t_2^n, u_n^{(2,2)} = n t_2^n, ..., u_n^{(2,l_2)} = n^{l_2-1} t_2^n, ..., \\ &u_n^{(m,1)} = t_m^n, u_n^{(m,2)} = n t_m^n, ..., u_n^{(m,l_m)} = n^{l_m-1} t_m^n. \end{aligned} \quad (5)$$

- Dacă ecuația caracteristică are solu□ii complexe, la fiecare două soluții complexe conjugate $t_1 = r_1(\cos t + i \sin t)$, $t_2 = r_1(\cos t - i \sin t), r > 0, t \in [0, 2\pi)$, cu ordinul de multiplicitate l_1, li se asociază şirurile:

$$\begin{aligned} &u_n^{(1,1)} = r^n \cos nt, u_n^{(1,2)} = n r^n \cos nt, ..., u_n^{(1,l_1)} = n^{l_1-1} r^n \cos nt, \\ &u_n^{(2,1)} = r^n \sin nt, u_n^{(2,2)} = n r^n \sin nt, ..., u_n^{(2,l_1)} = n^{l_1-1} r^n \sin nt. \end{aligned} \quad (6)$$

Algoritm pentru determinarea termenului general al unui şir definit printr-o relație de recurență liniară omogenăde ordin k cu coeficienți constanți:

1. Se rezolvă ecuația caracteristică.
2. Se caută soluția ca o combinație liniară de şiruri, în funcție de tipul rădăcinilor (*Lema 2*).
3. Se determină coeficienții, folosind relațiile scrise pentru primii $k-1$ termeni.
4. Se scrie formula termenului general al şirului.

Propoziția 1: Fie șirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ definit prin relația de recurență (1) și $(d_n)_{n\in\mathbf{N}}$ șirul diferențelor a doi termeni consecutivi definit prin

$$d_n = x_{n+1} - x_n, n \in \mathbf{N}. \quad (7)$$

Atunci $(d_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este un șir recurent de ordin k.

Demonstrația este imediată. Se scriu relațiile de recurență pentru n, respectiv $n+1$ și se scad termen cu termen. Se obține:

$$x_{n+k+1} - x_{n+k} = a_1(x_{n+k} - x_{n+k-1}) + ... + a_k(x_{n+1} - x_n),$$

relație ce se poate scrie:

$$d_{n+k} = a_1 d_{n+k-1} + a_2 d_{n+k-2} + ... + a_k d_n, \forall n \in \mathbf{N},$$

Deci șirul diferențelor verifică o relație de recurență de ordin k.

Propoziția 2: Fie șirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ definit prin relația de recurență (1) și $(s_n)_{n\in\mathbf{N}}$ șirul sumelor parțiale definit prin

$$s_n = x_0 + x_1 + ... + x_n, n \in \mathbf{N}. \quad (8)$$

Atunci $(s_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este un șir recurent de ordin $k+1$.

Demonstrația pornește de la modul cum este definit șirul sumelor:

$$s_n = x_0 + x_1 + ... + x_{n-1} + x_n = s_{n-1} - x_n \Rightarrow x_n = s_n - s_{n-1}.$$

În relația de recurență se înlocuiesc termenii șirului prin diferența dintre două sume consecutive. Rezultă:

$$s_{n+k} - s_{n+k-1} = a_1(s_{n+k-1} - s_{n+k-2}) + ... + a_k(s_n - s_{n-1}) \Rightarrow$$
$$s_{n+k} = (1+a_1)s_{n+k-1} + (a_2 - a_1)s_{n+k-2} + ... - a_k s_{n-1}.$$

Înlocuind n cu $n+1$, se obține

$$s_{n+k+1} = (1+a_1)s_{n+k} + (a_2 - a_1)s_{n+k-1} + ... - a_k s_n.$$

Propoziția 3: Dacă ecuația caracteristică are numai rădăcini complexe ale unității, atunci șirul este periodic.

Demonstrație: Ecuația caracteristică este

$$t^k + t^{k-1} + ... + 1 = 0, \quad (9)$$

deci relația de recurență este

$$x_{n+k} + x_{n+k-1} + x_{n+k-2} + ... + x_n = 0, \quad (10)$$

iar pentru $n+1$ se obține:

$$x_{n+k+1} = x_n, \forall n \in \mathbf{N},$$

deci șirul este periodic de perioadă principală $k+1$.

Propoziția 4: Dacă ecuația caracteristică are coeficienți binomiali

$$x_{n+k} = C_k^1 x_{n+k-1} - C_k^2 x_{n+k-2} + ... + (-1)^{k-1} C_k^k x_n, \forall n \in \mathbf{N}, \quad (11)$$

atunci formula termenului general este polinomială.

Demonstrație: Ecuația caracteristică este

$$C_k^0 t^k - C_k^1 t^{n+k-1} + C_k^2 t^{n+k-2} - ... + (-1)^{k-1} C_k^k = 0 \Rightarrow (t-1)^k = 0,$$

deci toate rădăcinile sunt reale egale cu 1. Formula termenului general este

$$x_n = p_1 + p_2 n + ... + p_k n^{k-1}. \quad (12)$$

Observația 1:

Pentru $k = 3$ fie șirul definit prin

$$x_{n+3} = 3x_{n+2} - 3x_{n+1} + x_n, x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 4. \quad (13)$$

Ecuația caracteristică este:

$C_3^0 t^3 - C_3^1 t^2 + C_3^2 t - C_3^3 = 0 \Rightarrow (t-1)^3 = 0$, deci termenul general al şirului este de forma:

$x_n = p_1 + p_2 n + p_3 n^2$.

Folosind valorile pentru primii trei termeni ai şirului se obțin coeficienții:

$p_1 = 0, p_2 = 0, p_3 = 1$.

Formula termenului general este polinomială: $x_n = n^2, n \in \mathbf{N}$ (şirul pătratelor numerelor naturale).

Conform *Propoziției 2*, şirul sumelor parțiale $s_n = 0^2 + 1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

va verifica şi el o relație de recurență de acelaşi tip:

$$s_{n+4} = 4s_{n+3} - 6s_{n+2} + 4s_{n+1} - s_n, \forall n \in \mathbf{N}^*. \quad (14)$$

În plus, efectuînd câteva calcule simple, descoperim proprietăți interesante ale şirului pătratelor numerelor naturale.

$$x_{n+1} = (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 \Rightarrow x_{n+1} = x_n + 2n + 1, n \in \mathbf{N}, \quad (15)$$

deci şirul poate fi definit printr-o relație de recurență liniară neomogenă de ordinul întâi cu coeficienți neconstanți.

Scriind relația pentru $n+2$, respectiv $n+1$ şi scăzând relațiile teremn cu termen, se obține:

$$x_{n+2} = 2x_{n+1} - x_n + 2, n \in \mathbf{N}, \quad (16)$$

deci şirul poate fi definit printr-o relație de recurență liniară neomogenă de ordinul doi cu coeficienți constanți.

Observația 2:

Pentru $k = 4$, şirul definit prin

$$x_{n+4} = 4x_{n+3} - 6x_{n+2} + 4x_{n+1} - x_n, x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 8, x_3 = 27 \quad (17)$$

este şirul cuburilor numerelor naturale $x_n = n^3, n \in \mathbf{N}$.

Procedând în mod analog, se obține:

$$x_{n+2} = 2x_{n+1} - x_n + 6n + 6, n \in \mathbf{N}, \quad (18)$$

deci şirul poate fi definit printr-o relație de recurență liniară neomogenă de ordinul doi cu coeficienți neconstanți;

$$x_{n+3} = 3x_{n+2} - 3x_{n+1} + x_n + 6, n \in \mathbf{N}, \quad (19)$$

deci şirul poate fi definit printr-o relație de recurență liniară neomogenă de ordinul trei cu coeficienți constanți;

$$x_{n+4} = 4x_{n+3} - 6x_{n+2} + 4x_{n+1} - x_n, n \in \mathbf{N}, \quad (20)$$

deci şirul poate fi definit printr-o relație de recurență liniară omogenă de ordinul patru cu coeficienți constanți.

Şirul sumelor parțiale $s_n = 0^3 + 1^3 + 2^3 + ... + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

va verifica şi el o relație de recurență liniară:

$$s_{n+5} = 5s_{n+4} - 10s_{n+3} + 10s_{n+2} - 5s_{n+1} + s_n, \forall n \in \mathbf{N}. \quad (21)$$

3. RELAȚII DE RECURENȚĂ DE ORDIN 2

Există şiruriri definite prin recurențe liniare de ordinul al doilea care au proprietăți interesante şi aplicații practice neaşteptate. Iată în continuare câteva exemple dintre cele mai cunoscute.

Şirul lui Fibonacci a fascinat matematicienii tuturor timpurilor, dar mai ales i-a inspirat pe gânditorii din toate disciplinele – biologi, fizicieni, pictori, sculptori muzicieni, arhitecţi, astronomi, istorici, psihologi şi chiar mistici.

În capitolul XII al *Cărţii abacului*, Leonardo Fibonacci propune următoarea problemă:

”Un om a pus o pereche de iepuri într-un loc înconjurat din toate părţile de un zid. Câte perechi de iepuri pot fi produse de această pereche într-un an, dacă presupunem că fiecare pereche dă naştere în fiecare lună la o nouă pereche, care începând cu a doua lună începe să se reproducă?”

Proprietatea generală că fiecare termen al şirului este egal cu suma celor doi termeni precedenţi se exprimă matematic (noţiune introdusă de către matematicianul Albert Girard):

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n, \forall n \in \mathbf{N}, f_0 = 0, f_1 = 1. \tag{22}$$

Folosind algoritmul propus anterior se determină formula termenului general al şirului

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n, \forall n \in \mathbf{N}. \tag{23}$$

Deşi *Cartea abacului* a apărut în 1202, denumirea ”Şirul lui Fibonacci” a fost dată abia în secolul XIX de către matematicianul Edouard Lucas. Acesta a studiat proprietăţile unui nou şir, dat de aceeaşi formulă, dar în care primii doi termeni au valori diferite, numit apoi Şirul lui Lucas:

$$l_{n+2} = l_{n+1} + l_n, \forall n \in \mathbf{N}, l_0 = 2, l_1 = 1. \tag{24}$$

Formula termenului general este

$$l_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n, \forall n \in \mathbf{N}. \tag{25}$$

O proprietate interesantă leagă şirul lui Fibonacci de orice şir definit cu aceeaşi formulă, dar cu valori diferite pentru primii doi termeni.

Propoziţia 5: şirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ definit prin

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n, \forall n \in \mathbf{N}, x_1, x_2 \in \mathbf{R} \tag{26}$$

are termenul general

$$x_n = x_1 f_{n-2} + x_2 f_{n-1}, \forall n \geq 2. \tag{27}$$

Demonstraţia se face folosind un al treilea şir $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ definit cu aceeaşi formulă şi $a_1 = 0, a_2 = 1$. Se observă imediat că $a_{n+1} = f_n, \forall n \geq 1$ şi se caută $p, q \in \mathbf{R}$ astfel încât $x_n = pf_n + qa_n$. Înlocuind $n = 1$, respectiv $n = 2$ se obţin coeficienţii $p = x_1, q = x_2 - x_1$. Rezultă $x_n = x_1 f_n + (x_2 - x_1)a_n = x_1 f_n + (x_2 - x_1)f_{n-1} = x_1(f_{n-1} + f_{n-2}) + (x_2 - x_1)f_{n-1} = = x_1 f_{n-2} + x_2 f_{n-1}$.

Propoziţia 5: Fie şirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ definit prin

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n, \forall n \in \mathbf{N}, x_1, x_2 \in \mathbf{R} \tag{28}$$

şi $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ cu proprietatea că există numărul real nenul r astfel încât

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = a_n x_{n+2} - r x_{n+3} + 3r - a_1, \forall n \in \mathbf{N}^*. \tag{29}$$

Atunci şirul $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este o progresie aritmetică de raţie r.

Demonstraţie: Scăzând relaţiile (29) pentru n, respectiv $n+1$ se obţine

$$a_{n+1}x_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} a_i x_i - \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = a_{n+1}x_{n+3} - r x_{n+4} + 3r - a_1 - a_n x_{n+2} + r x_{n+3} - 3r + a_1$$

$$\Rightarrow a_{n+1}x_{n+1} - a_{n+1}x_{n+3} = -r x_{n+4} - a_n x_{n+2} + r x_{n+3}$$

$$\Rightarrow a_{n+1}x_{n+1} - a_{n+1}x_{n+3} = -r(x_{n+3} + x_{n+2}) - a_n x_{n+2} + r x_{n+3}$$

$$\Rightarrow a_{n+1}\left(x_{n+1}-x_{n+3}\right)=-rx_{n+3}-rx_{n+2}-a_nx_{n+2}+rx_{n+3}=-rx_{n+2}-a_nx_{n+2}$$
$$\Rightarrow a_{n+1}\left(-x_{n+2}\right)=\left(a_n+r\right)\left(-x_{n+2}\right)\Rightarrow a_{n+1}=a_n+r\Rightarrow a_{n+1}-a_n=r,\forall n\in\mathbf{N}^*$$

Rezultă că diferența între orice doi termeni consecutivi este constantă, deci şirul $\left(a_n\right)_{n\in\mathbf{N}}$ este o progresie aritmetică de rație r.

Propoziția 6: Fie şirul $\left(x_n\right)_{n\in\mathbf{N}}$ definit prin

$$x_{n+2}=x_{n+1}+x_n,\forall n\in\mathbf{N},x_1,x_2\in\mathbf{R} \tag{30}$$

şi $\left(a_n\right)_{n\in\mathbf{N}}$ o progresie aritmetică de rație r. Atunci

$$\sum_{i=1}^{n}a_ix_i=a_nx_{n+2}-rx_{n+3}+3r-a_1,\forall n\in\mathbf{N}^*. \tag{31}$$

Demonstrația se poate face prin inducție matematică. Fie propoziția

$$P(n):\sum_{i=1}^{n}a_ix_i=a_nx_{n+2}-rx_{n+3}+3r-a_1,n\in\mathbf{N}^*.$$

Se verifică $P(1)$ adevărată:

$$a_1f_1=a_1f_3-rf_4+3r-a_1\Leftrightarrow a_1=a_1\cdot 2-r\cdot 3+3r-a_1\Leftrightarrow a_1=2a_1-a_1.$$

Se presupune $P(k)$ adevărată şi se demonstrează $P(k+1)$ adevărată, $k\in\mathbf{N}^*$.

$$P(k):\sum_{i=1}^{k}a_ix_i=a_kx_{k+2}-rx_{k+3}+3r-a_1,$$

$$P(k+1):\sum_{i=1}^{k+1}a_ix_i=a_{k+1}x_{k+3}-rx_{k+4}+3r-a_1.$$

Efectuând calcule se ob□ine:

$$\sum_{i=1}^{k+1}a_ix_i=\sum_{i=1}^{k}a_ix_i+a_{k+1}x_{k+1}=a_kx_{k+2}-rx_{k+3}+3r-a_1+a_{k+1}x_{k+1}=$$
$$=a_kx_{k+2}-r\left(x_{k+4}-x_{k+2}\right)+a_{k+1}x_{k+1}+3r-a_1=a_kx_{k+2}-rx_{k+4}+rx_{k+2}+a_{k+1}x_{k+1}+3r-a_1=$$
$$=\left(a_k+r\right)x_{k+2}+a_{k+1}x_{k+1}-rx_{k+4}+3r-a_1=a_{k+1}x_{k+2}+a_{k+1}x_{k+1}-rx_{k+4}+3r-a_1=$$
$$=a_{k+1}\left(x_{k+2}+x_{k+1}\right)-rx_{k+4}+3r-a_1=a_{k+1}x_{k+3}-rx_{k+4}+3r-a_1.$$

Din principiul inducției matematice rezultă $P(n)$ adevărată $\forall n\in\mathbf{N}^*$.

Propoziția 6: şirul $\left(y_n\right)_{n\in\mathbf{N}}$ al cărui termen general este raportul a doi termeni consecutivi ai şirului lui Fibonacci

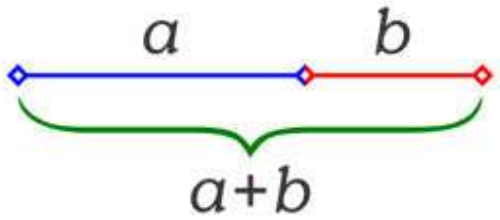
$$y_n=\frac{f_{n+1}}{f_n},\forall n\in\mathbf{N}^* \tag{32}$$

este convergent, iar limita sa este numărul irațional $\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1{,}6180339887....$, numit şi *numărul de aur*.

Demonstrația a fost făcută pentru prima dată de către matematicianul şi astronomul german Johannes Kepler.

Notația simbolică a numărului φ, provine de la inițiala sculptorului antic grec Fidias care a folosit *proporția de aur* în sculpturile sale. *Numărul de aur*, denumire dată de Leonardo da Vinci, a apărut în încercarea matematicienilor de a împărți un segment de dreaptă în medie şi extremă rație, iar fascinația numărului consta de fapt în armonia şi echilibrul raportului pe care îl reprezintă, raport care se regăseşte şi în legea creşterilor organice.

Numărul de aur φ este raportul care rezultă când un segment de dreaptă este împărțit în două părți, astfel încât raportul dintre întregul segment şi segmentul mai mare să fie egal cu raportul dintre segmentul mai mare şi cel mai mic rezultat.



Relația matematică se transcrie:

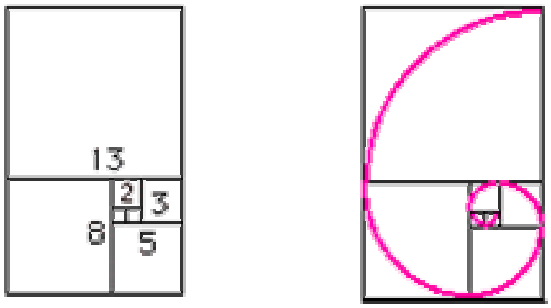
$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \varphi\,, \tag{33}$$

unde a este ”extremă rație” şi b este ”medie”.

Se poate obține o dispunere a numerelor Fibonacci într-un set de pătrate şi dreptunghiuri, acestea din urmă având ca lungime a laturilor două numere Fibonacci consecutive. Pornind de la două pătrate alăturate, cu laturile egale cu unitatea 1, se poate desena deasupra lor un altul cu latura 2 (= 1 + 1).

În continuare se poate alipi un alt pătrat cu latura 3, iar dedesubt unul cu latura 5, ş.a.m.d. De fapt avem de a face cu *dreptunghiuri de aur*, raportul laturilor acestora fiind egal cu numărul φ.

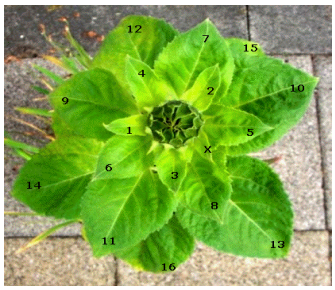
În fiecare pătrat se poate desena un sfert de cerc, dar astfel încât să se asigure continuitatea liniei, obținându-se un fel de spirală, care reprezintă o bună aproximație a celor întâlnite în natură, în lumea vie.



Secvența Fibonacci apare în structurile biologice, cum ar fi dispunerea ramurilor copacilor, aşezarea frunzelor în jurul tulpinii plantelor, spiralele cochiliilor, aranjamentul unui con de brad, desfăşurarea ramurilor unei ferigi, aspectul unui ananas.

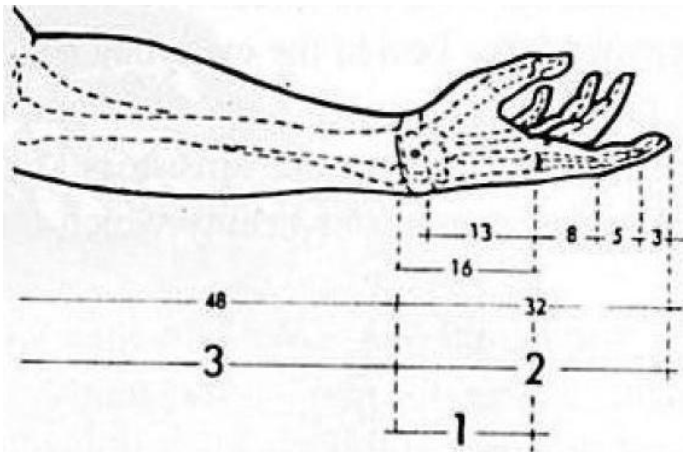
Dacă se privește o plantă de sus în jos se observă că frunzele sale sunt astfel dispuse încât cele de deasupra nu le obturează pe cele de dedesubt. În acest fel fiecare frunză primeşte suficientă lumină

solară şi permite apei de ploaie să alunece către tulpină şi să fie dirijată spre rădăcină – o altă armonie a naturii în concordanță cu secvența lui Fibonacci.

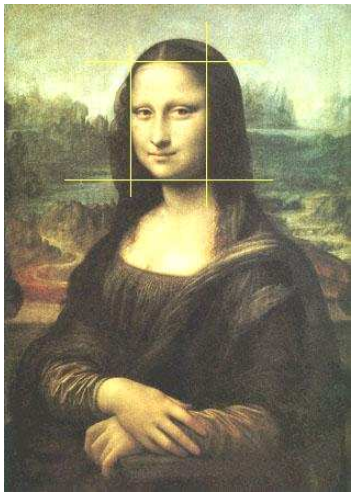


Fața umană este caracterizată din punct de vedere estetic prin câteva dimensiuni principale: distanța dintre ochi, distanța dintre gură şi ochi, distanța dintre nas şi ochi, dimensiunea gurii. In estetică se apreciază că fața este cu atât mai plăcută ochiului cu cât aceste dimensiuni respectă mai bine secvența lui Fibonacci.

Dacă privim mâinile unui om, constatăm alte coincidențe poate, ce ne amintesc de faimosul şir. Avem 2 mâini, cu 5 câte degete, fiecare având 3 falange separate prin două articulații. Coincidență sau nu, aspectul este interesant, cu atât mai mult cu cât dacă măsurăm lungimea oaselor degetelor, se pare că raportul dintre osul cel mai lung şi cel din mijloc, ca şi raportul dintre osul mijlociu şi cel mai scurt din vârf reprezintă proporția de aur *phi*. In medie, dimensiunile falangelor sunt: 2 cm, 3 cm, 5 cm, iar în continuare osul palmei are circa 8 cm (2, 3, 5, 8 sunt numere din secvența Fibonacci).



Dreptunghiu de aur, în care raportul laturilor este egal cu numărul de aur este considerat ca fiind deosebit de estetic şi ca urmare a fost şi este intens utilizat în arhitectură şi artă. Spre exemplu se consideră că fața Giocondei lui da Vinci se încadrează într-un astfel de dreptunghi, iar în construcția Parthenonului din Atena se regăsesc cel puțin două astfel de dreptunghiuri.



Numărul de aur este căutat în cele mai diverse şi neaşteptate situaţii, spre exemplu se încearcă găsească unei explicaţii din acest punct de vedere chiar şi pentru factorul de conversie 1,609, foarte apropiat de φ, care apare la transformarea distanţelor din mile în kilometri.

În muzică, numerele Fibonacci se utilizează deseori pentru realizarea acordajelor. Se crede că lucrarea *Muzică pentru instrumente de coarde, percuţie şi celestă*, a lui Bèla Bártok a fost structurată utilizând numerele Fibonacci.

Viitorul şi nevoia de cunoaştere şi înţelegere a oamenilor s-ar putea să confere acestor numere unice, noi aplicaţii şi interpretări, ajungând poate chiar şi pe terenul incert al fenomenelor paranormale.

Bibliografie

[1] D.M. Bătineţu, *Probleme de matematică pentru treapta a II-a de liceu*, Editura Albatros, Bucureşti (1979)
[2] M. Livio, *Secţiunea de aur*, Editura Humanitas, Bucureşti (2005)
[3] A.I. Markushevich, *Recursion sequences*, Mir Publishers, Moscow (1975)
[4] A. Vernescu, *Analiza matematică*, Editura Pantheon, Bucureşti (1992)